# Динамические сети. Новые перспективы исследований сложных социальных, экономических и биологических процессов

49ая Школа по физике конденсированного состояния ФКС-2015

16-21 марта 2015 г.Зеленогорск

# План А

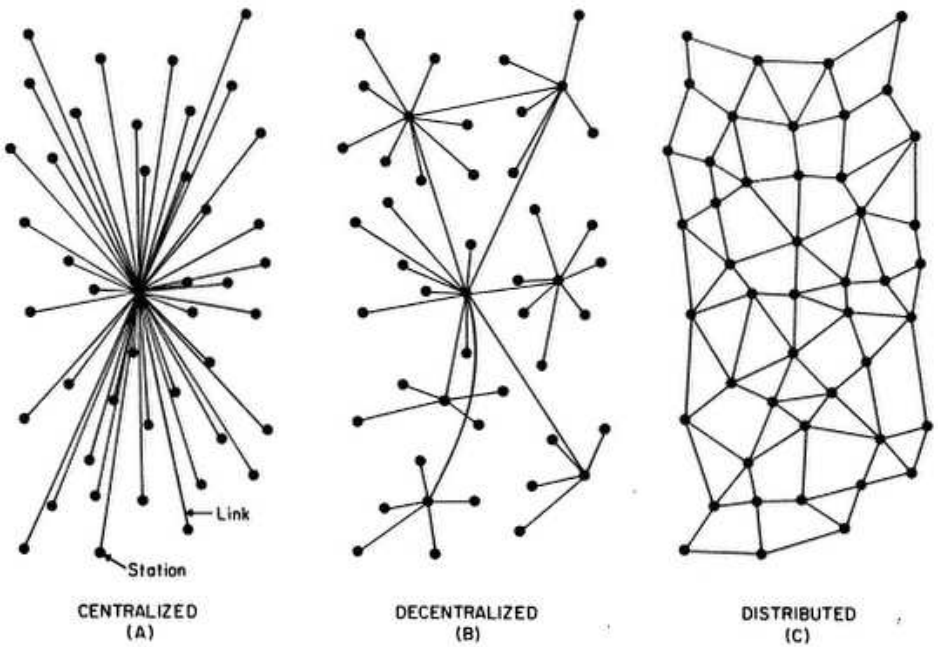
- Что такое сложная сеть. Примеры
- Каковы основные структурные характеристики сложных сетей
- Пример построения сложной сети с заданными характеристиками
- Динамические процессы на сложных сетях. Иерархия времен. Необходимость учета изменения сети во времени.

# План Б

- Что такое динамическая сеть. Примеры.
- Модель динамической сети (time-varying network). Важнейшая характеристика - активность узлов
- Зависимость основных характеристик динамической сети от активности узлов
- Пример развития динамического процесса на динамической сети (модель распространения эпидемий)
- Перспективы применения модели динамической сети для исследования сложных экономических, социальных, биологических процессов

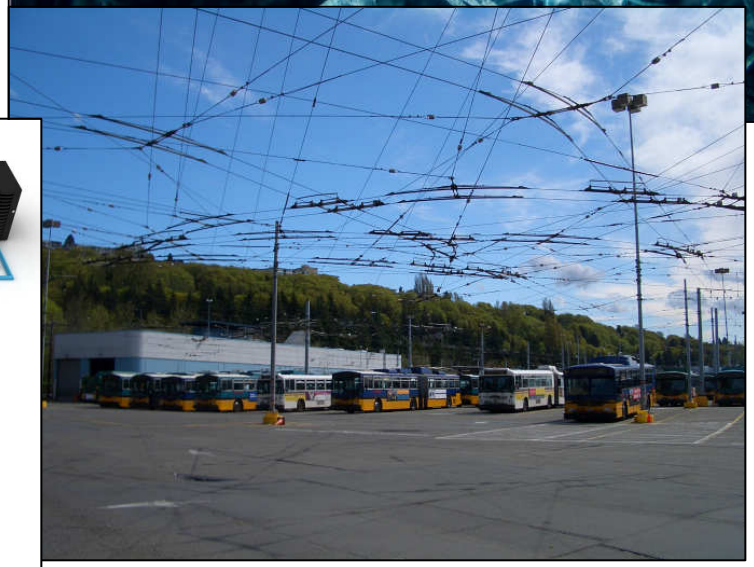
# Что такое сеть?

Совокупность узлов, соединенных связями

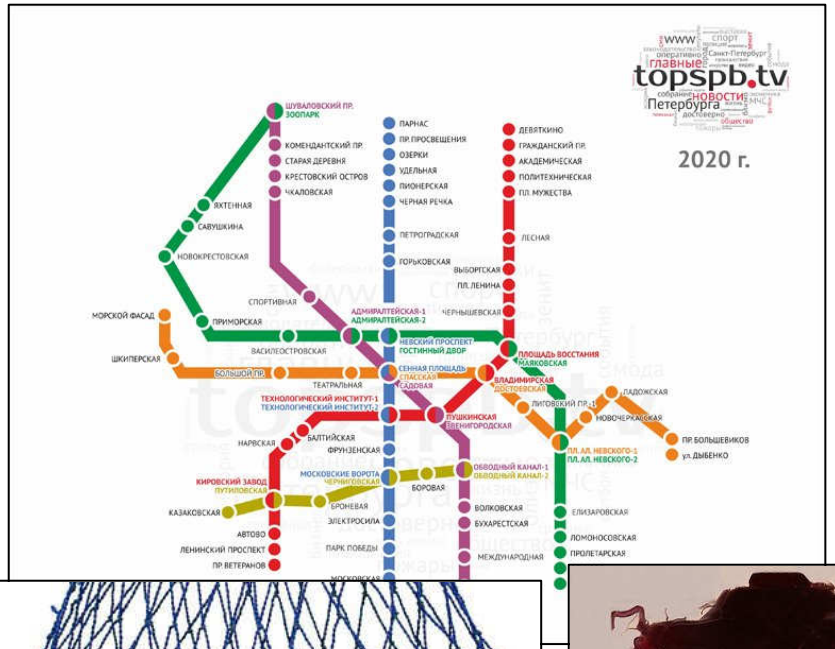


# Что такое сеть?

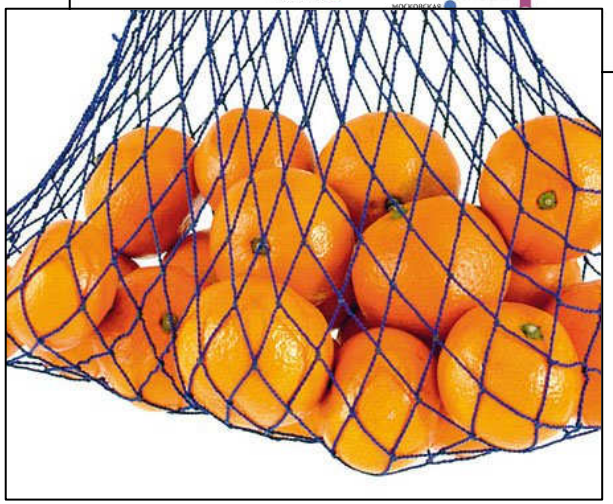
Узлы и связи по своему характеру могут быть любыми!

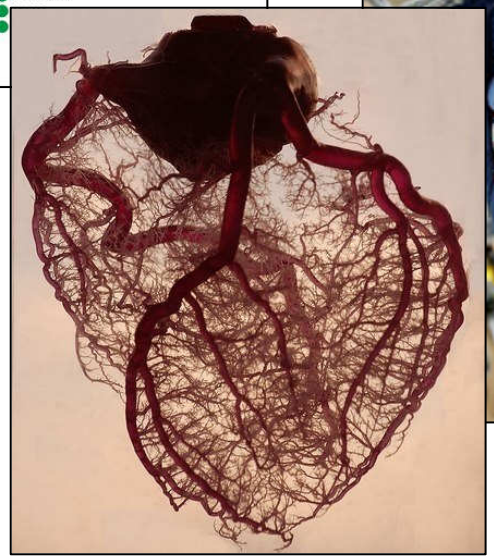


# МЫ В СЕТЯХ!


topspb.tv
2020 г.
ШУВАЛОВСКИЙ ПР.
ЗООПАРК
КОМЕНДАНТСКИЙ ПР.
СТАРАЯ ДЕРЕВНЯ
КРЕСТОВСКИЙ ОСТРОВ
ЧКАЛОВСКАЯ
ЯХТЕННАЯ
САВУШКИНА
НОВОКРЕСТОВСКАЯ
СПОРТИВНАЯ
МОРСКОЙ ФАСАД
ПРИМОРСКАЯ
ШКИПЕРСКАЯ
ВАСИЛЕОСТРОВСКАЯ
БОЛЬШОЙ ПР.
ТЕАТРАЛЬНАЯ
ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ-1
ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ-2
НАРВСКАЯ
БАЛТИЙСКАЯ
ФРУНЗЕНСКАЯ
КИРОВСКИЙ ЗАВОД
ПУТИЛОВСКАЯ
МОСКОВСКИЕ ВОРОТА
ЧЕРНИГОВСКАЯ
КАЗАКОВСКАЯ
БРОНЕВАЯ
ЭЛЕКТРОСИЛА
АВТОВО
ЛЕНИНСКИЙ ПРОСПЕКТ
ПАРК ПОБЕДЫ
ПР. ВЕТЕРАНОВ
ПАРНАС
ПР. ПРОСВЕЩЕНИЯ
ОЗЕРКИ
УДЕЛЬНАЯ
ПИОНЕРСКАЯ
ЧЕРНАЯ РЕЧКА
ПЕТРОГРАДСКАЯ
ГОРЬКОВСКАЯ
АДМИРАЛТЕЙСКАЯ-1
АДМИРАЛТЕЙСКАЯ-2
ЧЕРНЫШЕВСКАЯ
НЕВСКИЙ ПРОСПЕКТ
ГОСТИНЫЙ ДВОР
СЕННАЯ ПЛОЩАДЬ
САДОВАЯ
ПУШКИНСКАЯ
ТЕННИГОРОДСКАЯ
БОРОВАЯ
ОБВОДНЫЙ КАНАЛ-1
ОБВОДНЫЙ КАНАЛ-2
ВОЛКОВСКАЯ
БУХАРЕСТСКАЯ
МЕЖДУНАРОДНАЯ
ДЕВЯТКИНО
ГРАЖДАНСКИЙ ПР.
АКАДЕМИЧЕСКАЯ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКАЯ
ПЛ. МУЖЕСТВА
ЛЕСНАЯ
ВЫБОРГСКАЯ
ПЛ. ЛЕНИНА
ПЛОЩАДЬ ВОССТАНИЯ
ЧАЙКОВСКАЯ
ВЛАДИМИРСКАЯ
ДОСТОЕВСКАЯ
ЛИТОВСКИЙ ПР.-1
ПЛ. АЛ. НЕВСКОГО-1
ПЛ. АЛ. НЕВСКОГО-2
ЛАДОЖСКАЯ
НОВОЧЕРКАССКАЯ
ПР. БОЛЬШЕВИКОВ
УЛ. ДЫБЕНКО
ЕЛИЗАРОВСКАЯ
ЛОМОНОСОВСКАЯ
ПРОЛЕТАРСКАЯ

tumblr.
tumbl





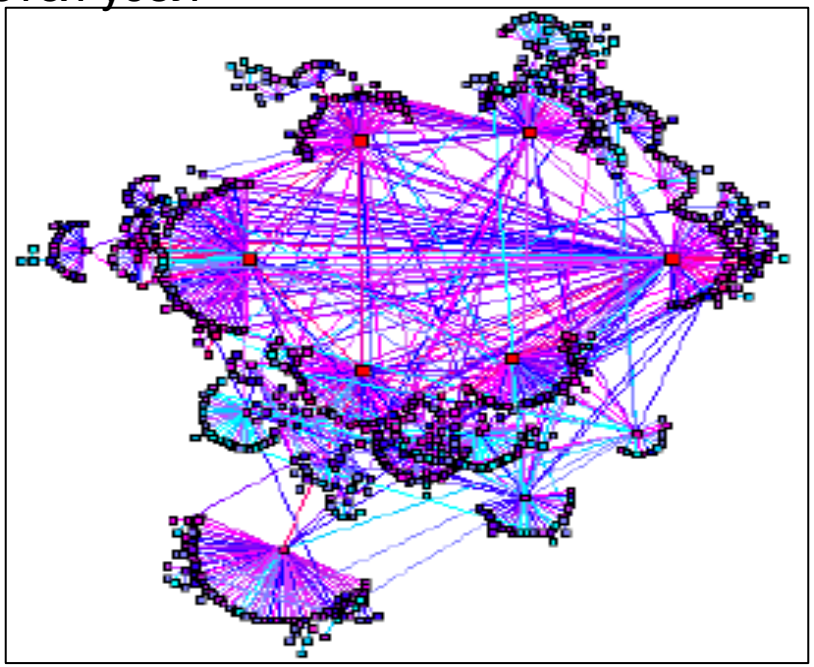
спортМастер

# СТРУКТУРА СЕТИ

$k_i$ - количество связей узла *i* в сети

N –число узлов

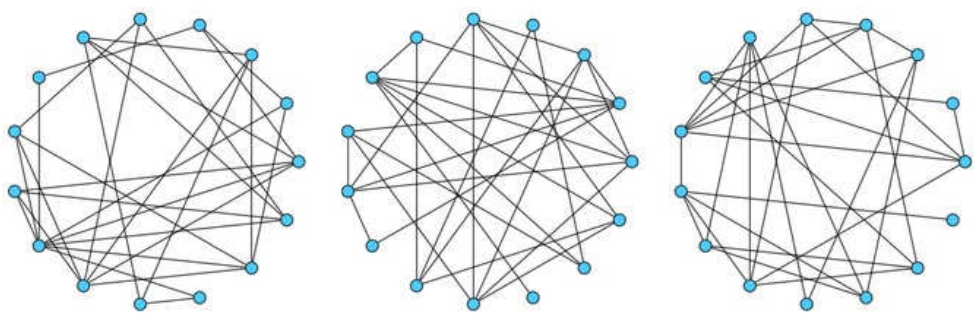
m– число связей, с которыми рождается узел



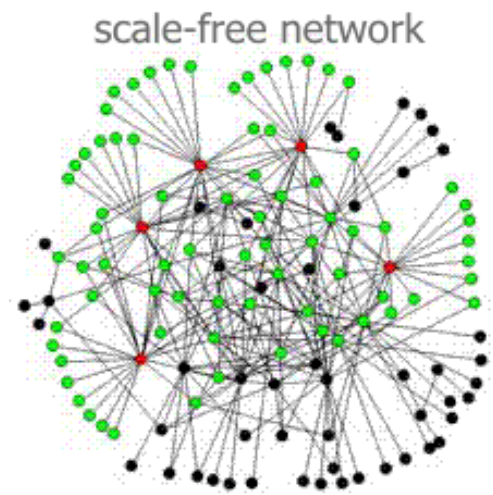
# ХАРАКТЕРИСТИКИ СЕТИ

1.Функция распределения числа связей показывает сколько узлов в сети имеет определенное число связей.

Сеть Эрдеша-Реньи $$P(k) = \binom{N-1}{k} p^k (1-p)^{N-1-k}$$

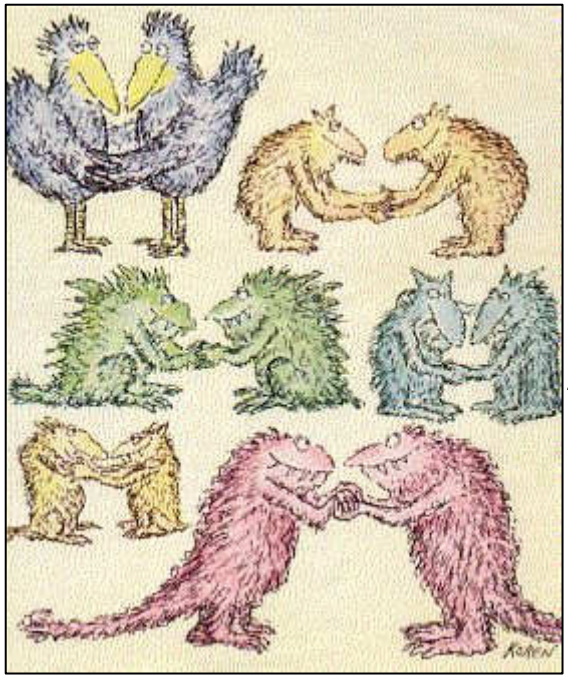


Безмасштабная сеть $$P(k) \sim \frac{1}{k^{\gamma}}$$




2. Корреляции между узлами с различным числом связей

# АССОРТАТИВНОСТЬ-ДИСАССОРТАТИВНОСТЬ

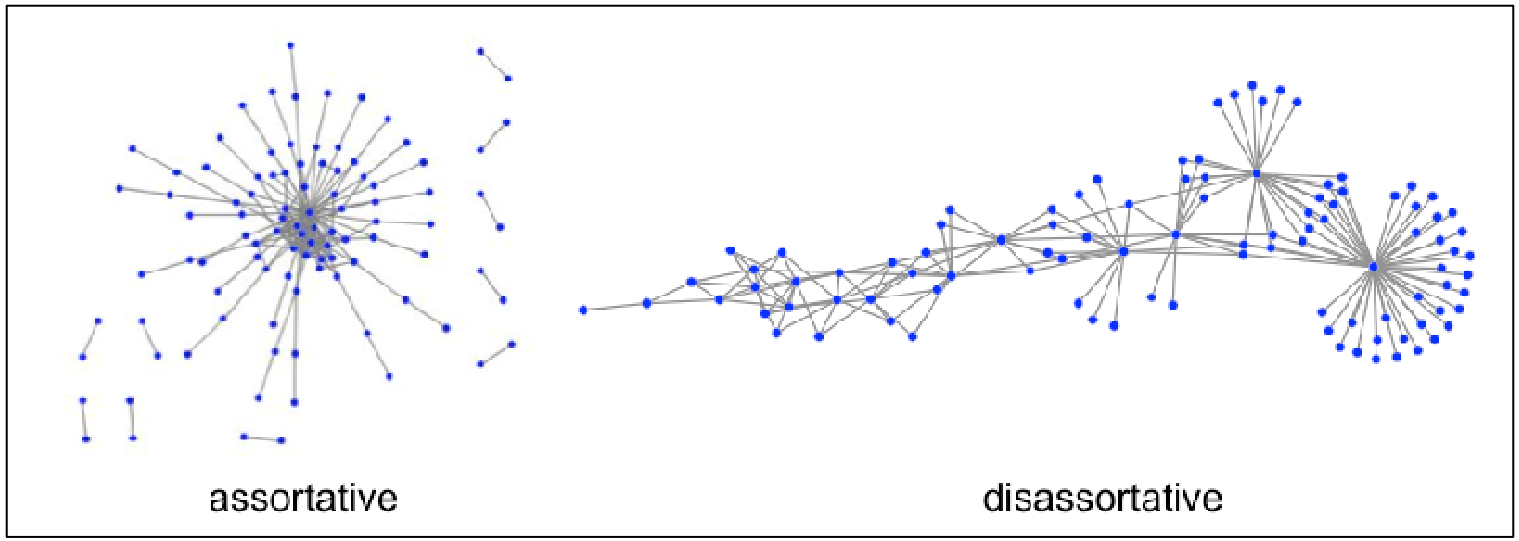


Ассортативность – подобное ищет подобное

Дисасортативность – смесь ужа и ежа

# АССОРТАТИВНОСТЬ-ДИСАССОРТАТИВНОСТЬ

- Ассортативность – связи устанавливаются преимущественно между узлами с одинаковым значением k
- Дисассортативность –узлы с большим значением k (хабы) в основном связаны с узлами  с малым значением k



# АССОРТАТИВНЫЕ И ДИСАССОРТАТИВНЫЕ СЕТИ

Ассортативная сеть

Дисассотративная сеть

# КОЭФФИЦИЕНТ АССОРТАТИВНОСТИ

$$r = \frac{\sum_k e_{kk} - \sum_k a_k b_k}{1 - \sum_k a_k b_k} \qquad a_l = \sum_k e_{lk}; \;\; b_k = \sum_l e_{lk}$$

$e_{lk}$ - доля связей, соединяющих узлы с числом связей, равным l и k

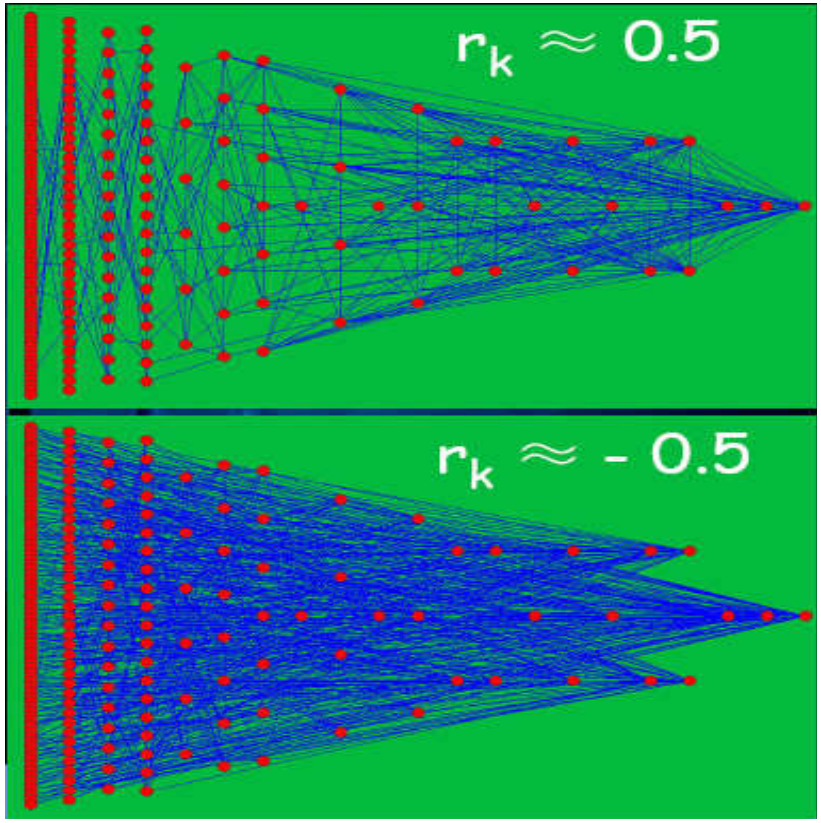
Полностью ассортативная сеть: $\sum_k e_{kk} = 1 \Rightarrow \mathrm{r} = 1$

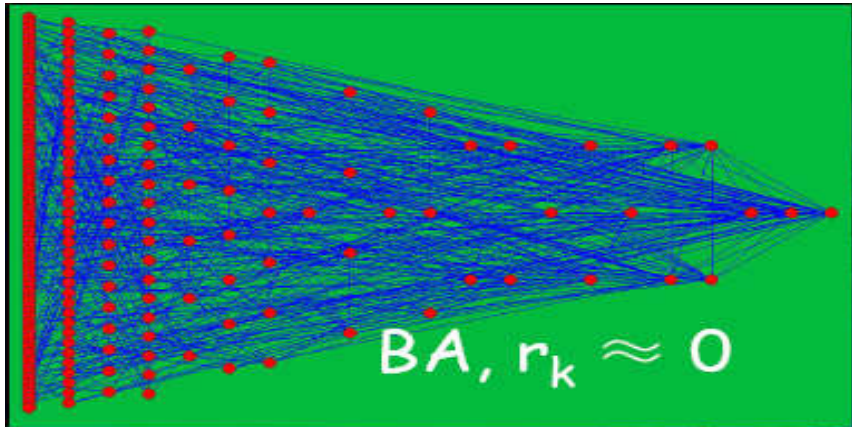
Ассортативная сеть: $e_{kk} < a_k b_k \Rightarrow \mathrm{r} < 0$

Дисассортативная сеть: $e_{kk} > a_k b_k \Rightarrow \mathrm{r} > 0$

Некоррелированная сеть: $e_{lk} = a_l b_k \Rightarrow \mathrm{r} = 0$

# иллюстрации



# ПОСТРОЕНИЕ СЕТИ

- построение начального кластера из m+1 (m=20) узлов, связанных «все со всеми» без «двойных» связей
- присоединение новых узлов по методу линейного преимущественного присоединения. Узел для присоединения выбирается с вероятностью

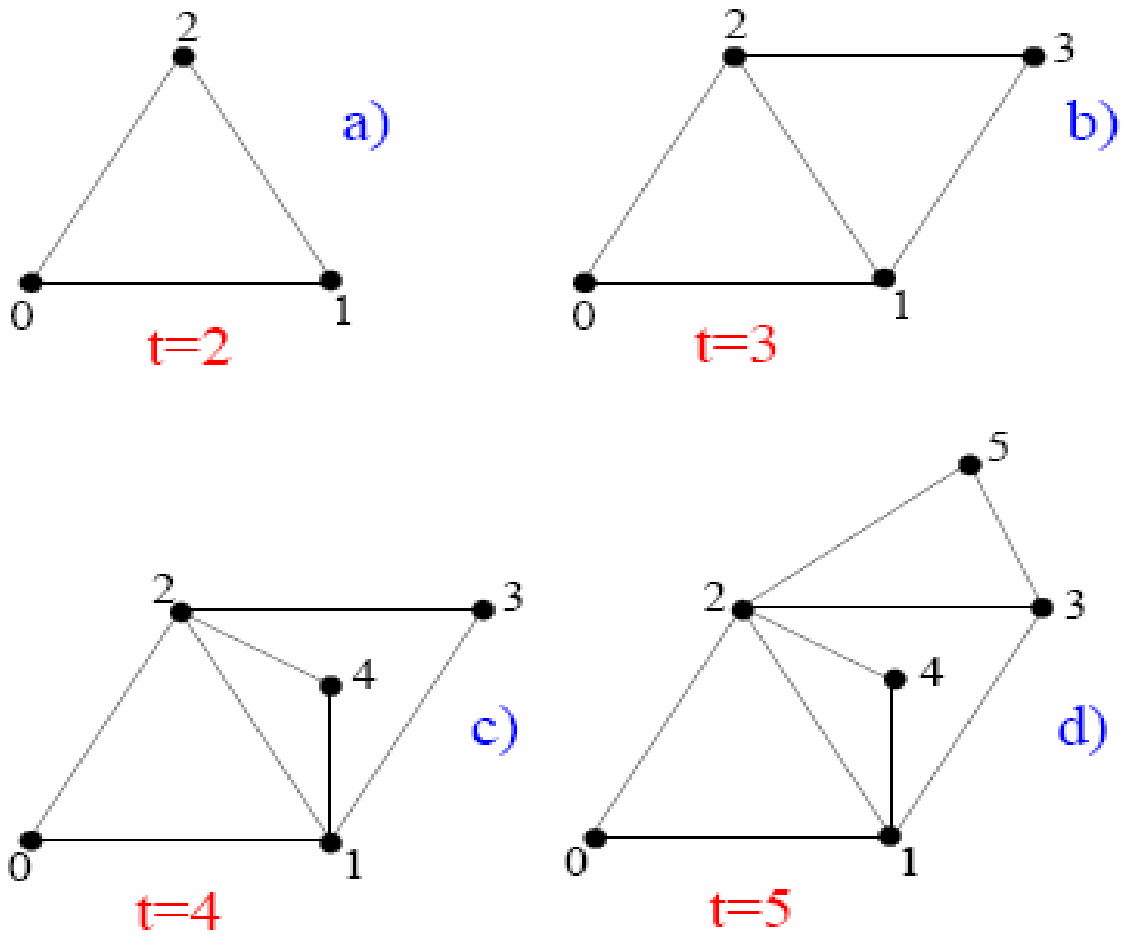
$$f(k_i, A) = (k_i + A) / \sum_i (k_i + A)$$

А –варьируемый коэффициент, определяющий ассортативность сети

Получается сеть со следующей функцией распределения числа связей

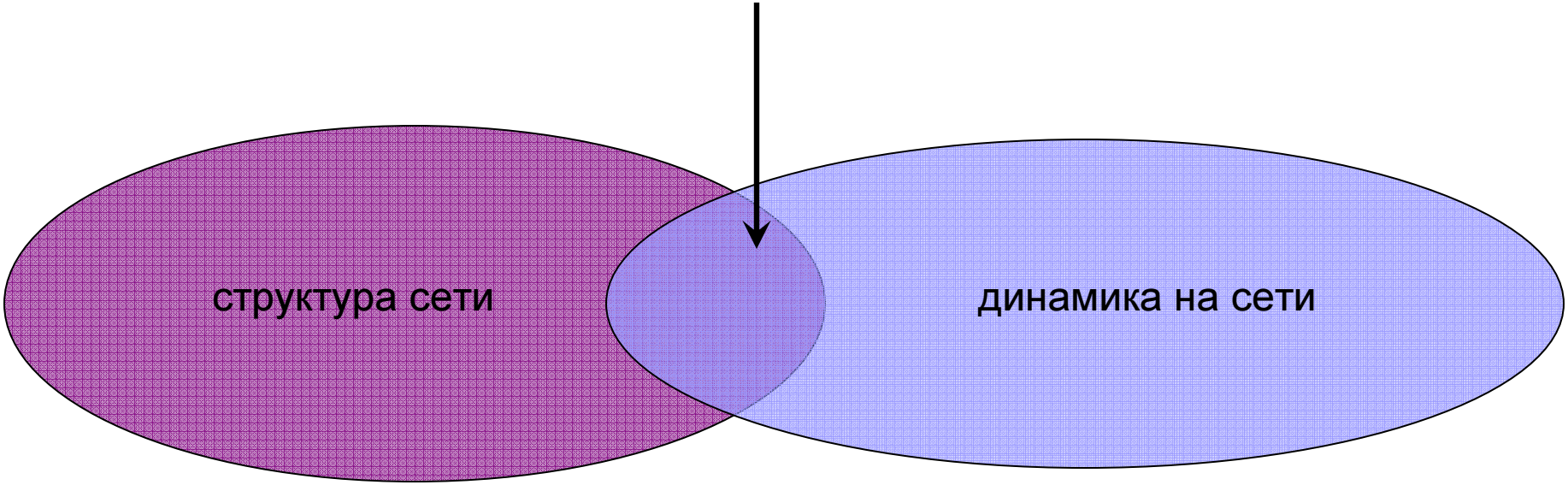
$$P(k) = \frac{(2m + A)}{m(m + A)} \left[\frac{m + A}{k + A}\right]^{\gamma} \theta(k - m), \ \gamma = 3 + \frac{A}{m}$$

# построение сети. иллюстрация



# Наука о сетях

Самое интересное
происходит здесь:
Как топология сети влияет на
динамический процесс,
развивающийся на ней.



# Динамика на сетях. Иерархия времен

$t_{process}$ - характерное время динамики

$t_{connection}$ - время существования связи

$t_{process} << t_{connection}$

сеть считается стационарной

$t_{process} >> t_{connection}$

задача сводится к вероятности существования связи

# Динамика на сетях. Иерархия времен

$$t_{process} \approx t_{connection}$$

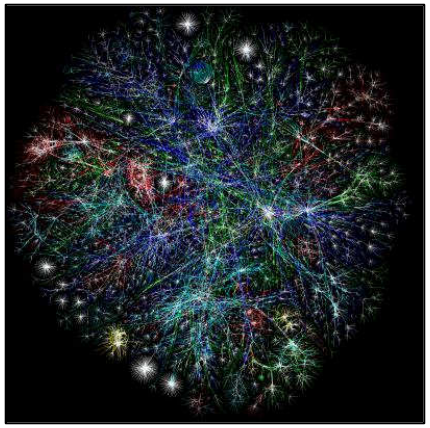
Необходима модель динамической сети, в которой число узлов и структура связей меняются со временем

# Динамические сети (time-varying networks)

телефонные контакты

E-mail контакты

обмен сообщениями



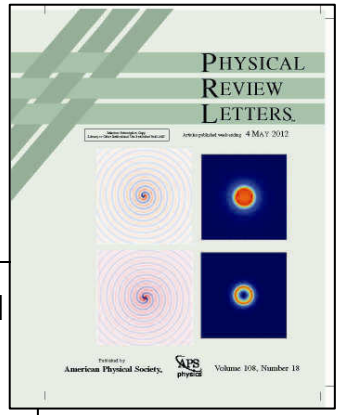
нейронные сети

финансовые сети

распространение эпидемий

# Модель динамической сети. Эмпирические данные

**N. Perra**, B. Goncalves, R. Pastor-Satorras, A. Vespignani,
*Activity driven modeling of dynamic networks*
Scientific Reports 2, 469, doi:10.1038/srep00469 (2012)

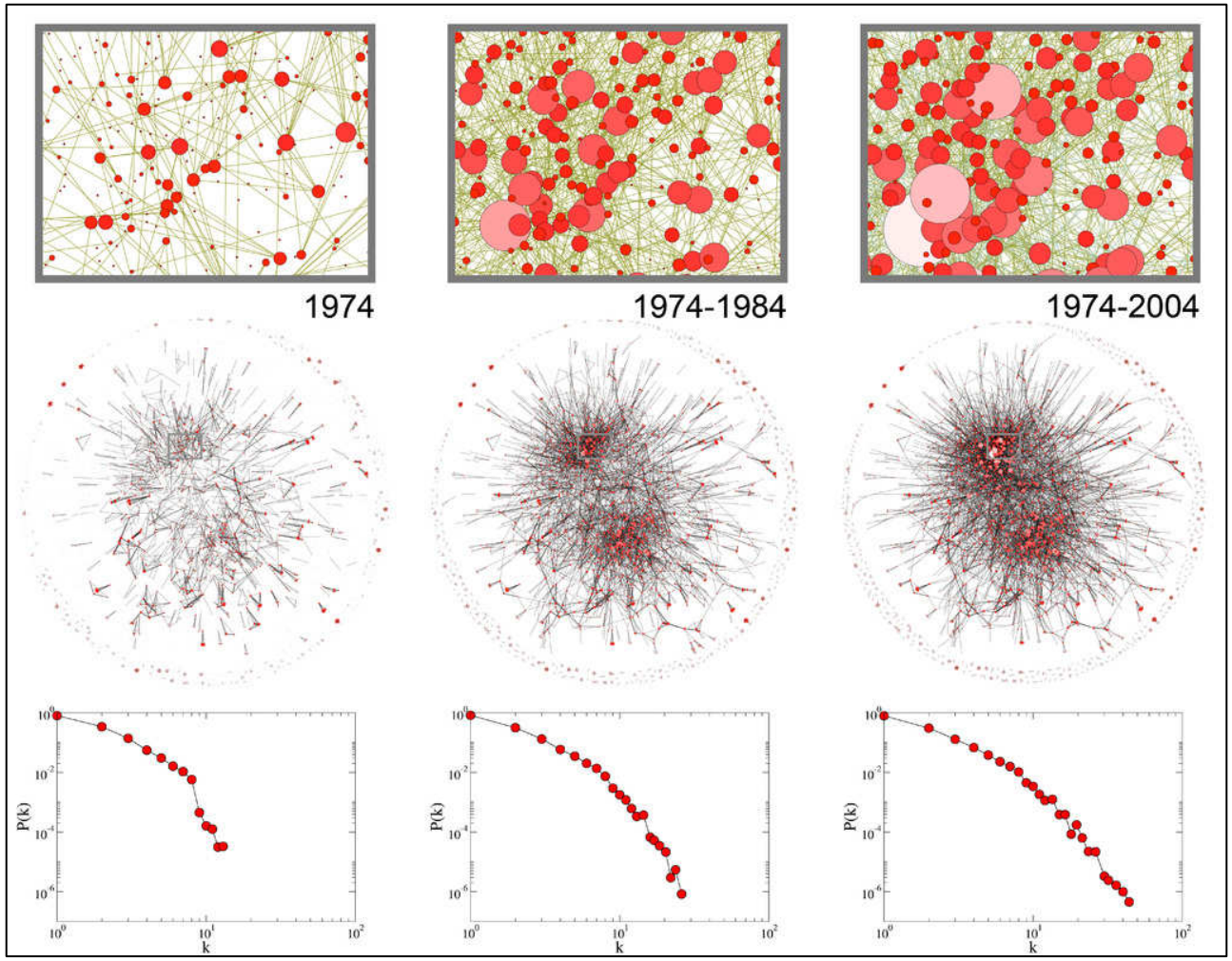



PRL: узлы – авторы, связи – написание общей статьи (брались статьи с числом авторов<10) за период наблюдения (1960-2004 годы) 71 583 автора, 261 553 связи между ними

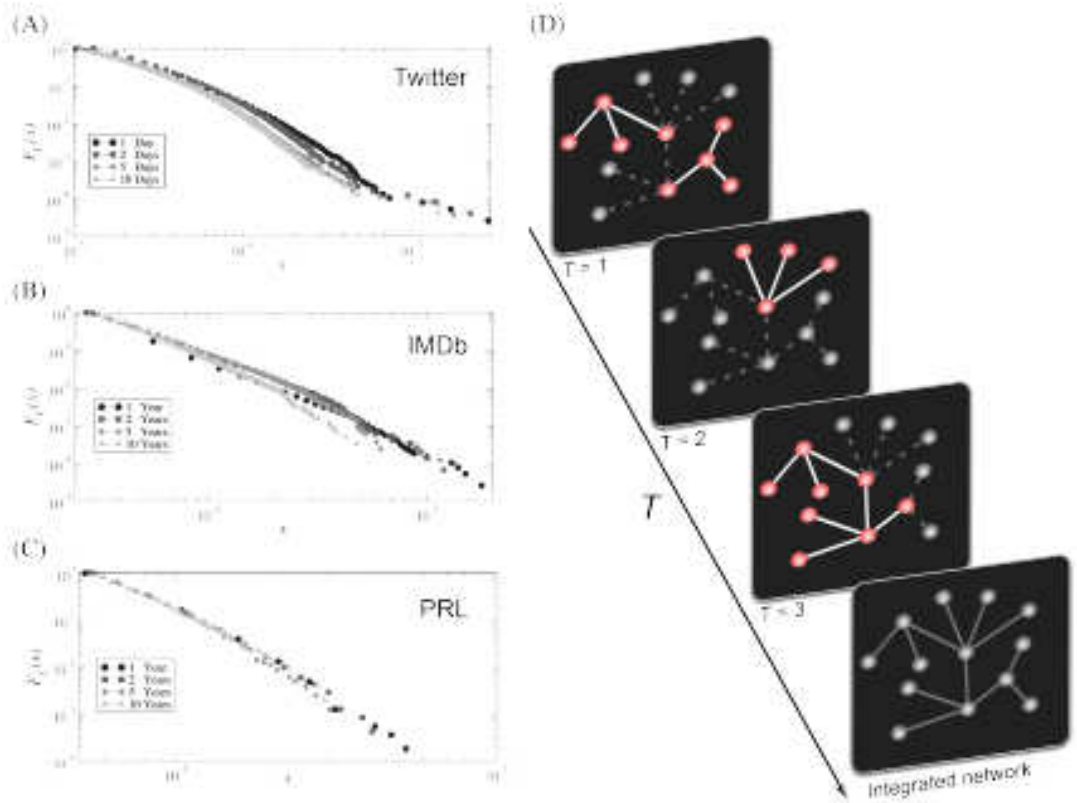
Twitter: узлы – пользователи, связи – обмен хотя бы одним твитом за период наблюдения (9 месяцев 2008 года ) 531 788 пользователей обменялись 2 566 398 сообщениями

IMDb: узлы – актеры, связи – съемки в одном и том же проекте За период наблюдения (1950-2010 годы) 1 273 631 актер были задействованы в 47 884 882 проекте.

# Модель динамической сети. Эмпирические предпосылки



# Модель динамической сети. Эмпирические предпосылки



# Модель динамической сети. Математическая формулировка

1. В начальный момент времени t имеется N не связанных между собой узлов.

2. У каждого узла имеется характеристика $a_i$ - активность данного узла, определяющая вероятность узлу установить связь.

3. Величины $a_i$ распределены соответственно функции распределения $F(a)$, которая задается при построении сети произвольно или находится эмпирически.

Например: $F(a) \sim a^{-\gamma}$

$$F(a) \sim \delta_{aa_0} \quad 0 < a_0 < 1$$

$$F(a) \sim 1/a_{\max} \quad 0 \le a \le a_{\max} \le 1$$

# Модель динамической сети. Математическая формулировка

4. За один шаг $\Delta t$ любой узел со своей вероятностью $a_i \Delta t$ становится активным и устанавливает заранее фиксированное количество связей $m$ с другими узлами.

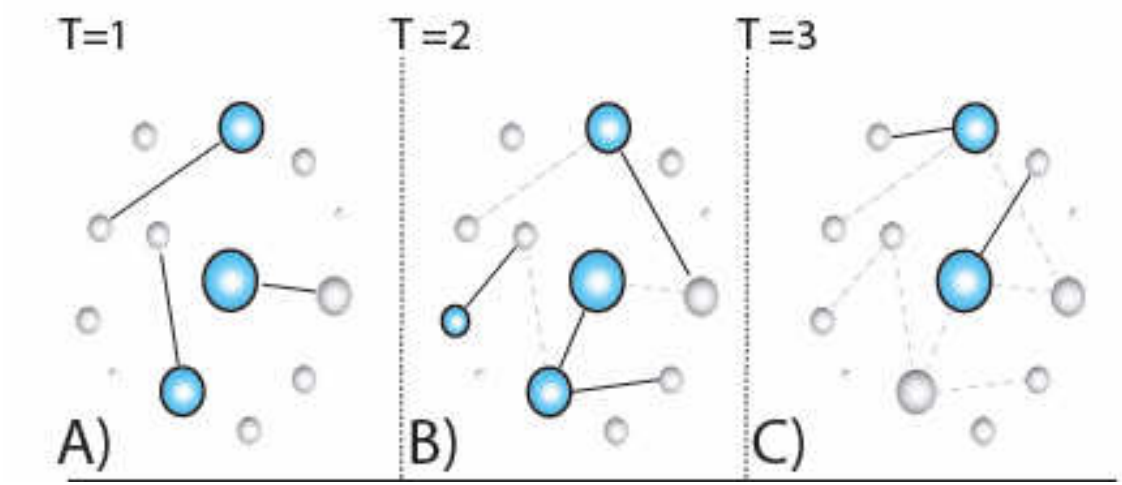
5. В следующий момент времени все связи исчезают и мы вновь имеем N несвязанных узлов.

6. Процесс повторяется

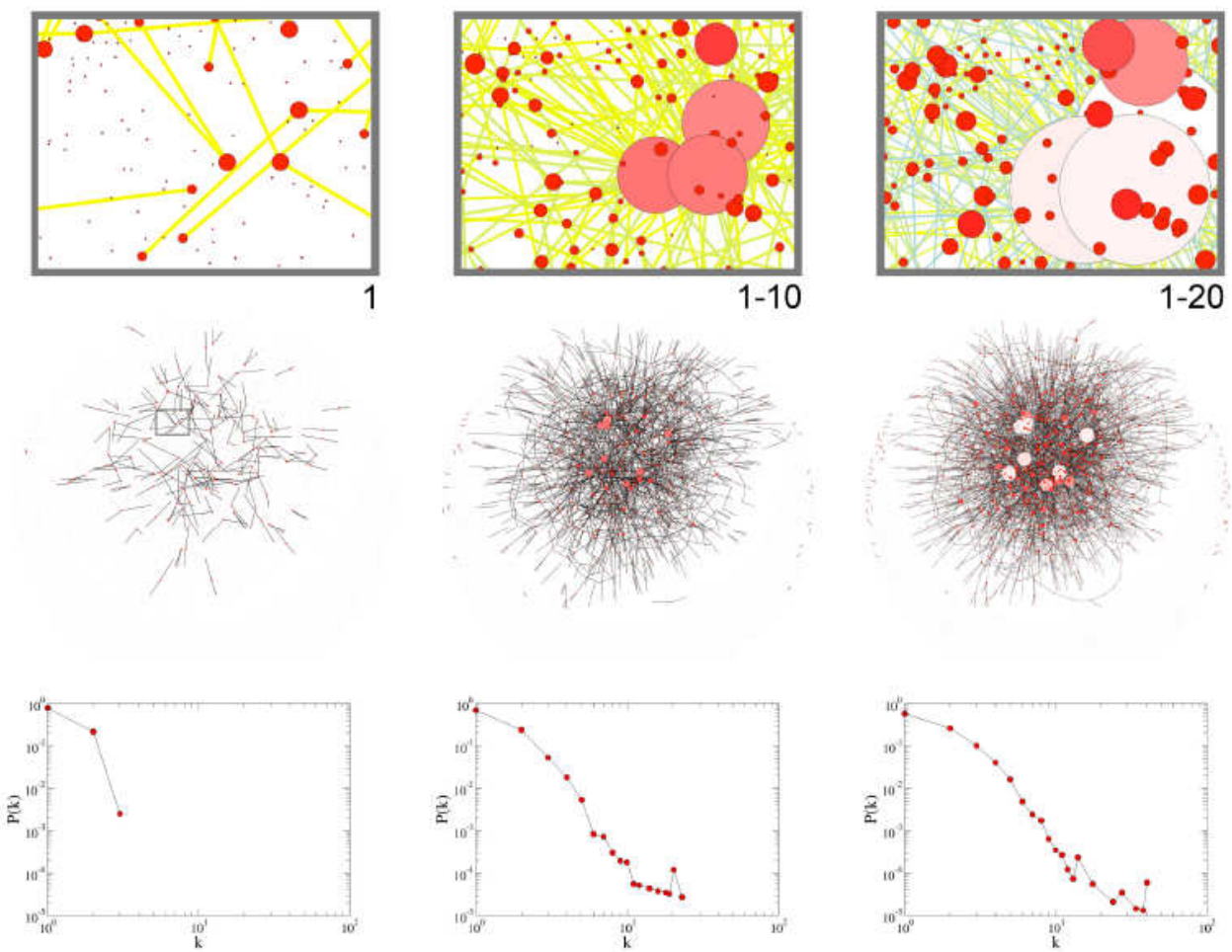
$\Delta t$ -время жизни каждой связи и характерное время динамического процесса

$N < a >$ - среднее число активных узлов в каждый момент времени

$mN < a >$ - среднее число связей в сети



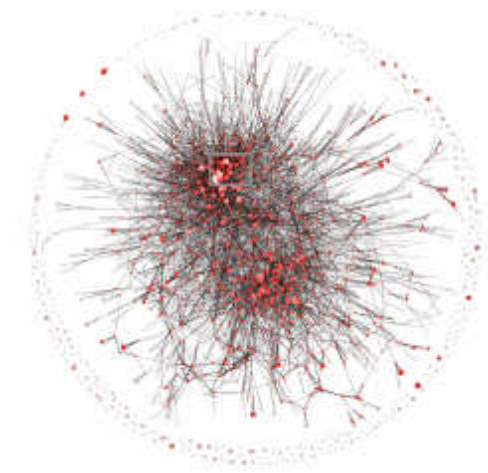
# Модель динамической сети. Иллюстрация N=5000, m=2



# Модель динамической сети. Отличие от топологической сети

Для интегрированной сети можно определить все структурные характеристики, которые вводились ранее для топологических сетей, однако, в случае динамической сети, они будут иметь иное «происхождение»

$$G_T = \bigcup_{t=0}^{t=T} G_t$$



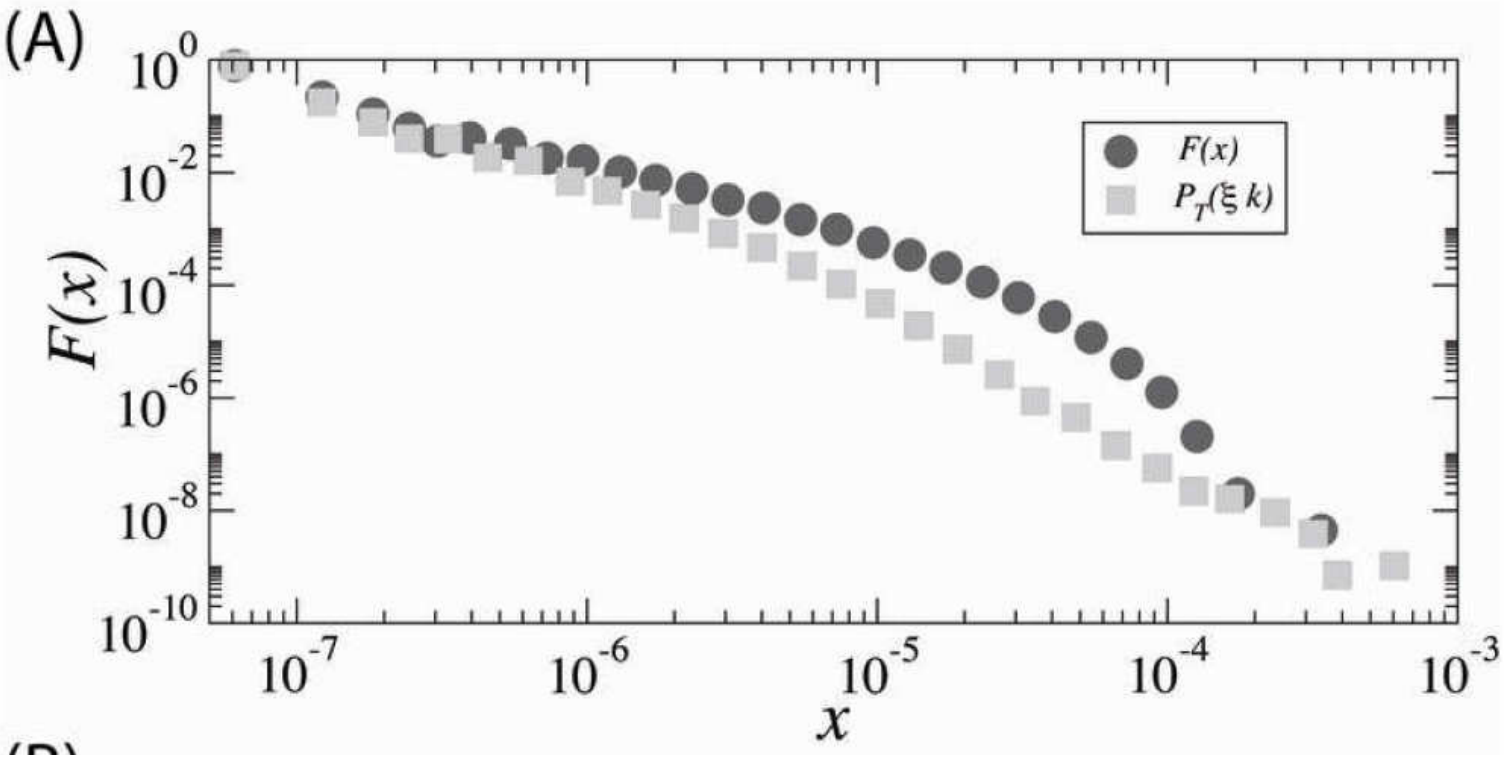
$a_i = \eta x_i -$ активность узла

$F(x_i) \sim x^{-\gamma}$ - функция распределения активностей узлов

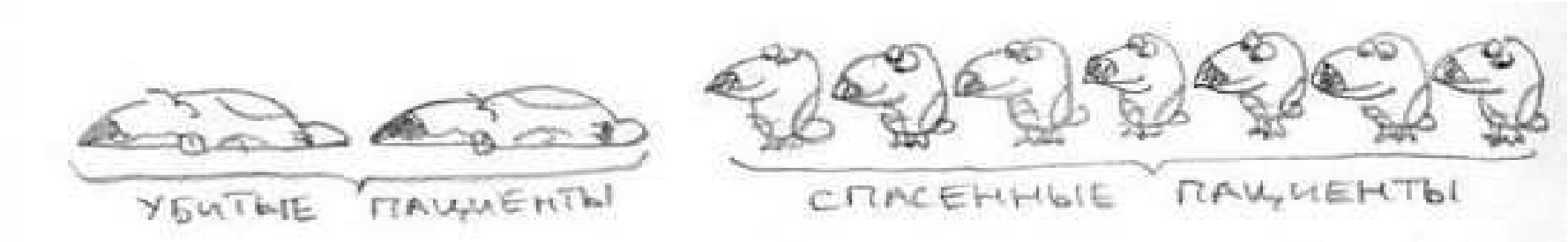
$$< k >_t = \frac{2E_t}{N} = 2m\eta < x >; \; E_t = 2mN\eta < x >$$

$$P_T(k) \sim F\left(\frac{k}{Tm\eta}\right)$$

# Отличие модели динамической сети от топологической



# SIS-модель на динамической сети




$$S + I \xrightarrow{\lambda} 2I \qquad I \xrightarrow{\mu} S$$

$$\left.\begin{aligned} &\rho^{\alpha} = N^{\alpha} / N \quad \beta = \langle k \rangle \lambda \\ &\frac{d\rho^{I}}{dt} = \beta \rho^{I} \rho^{s} - \mu \rho^{I} \\ &\frac{d\rho^{S}}{dt} = -\beta \rho^{I} \rho^{s} + \mu \rho^{I} \end{aligned}\right\rangle$$

Эпидемия разрастается экспоненциально, если

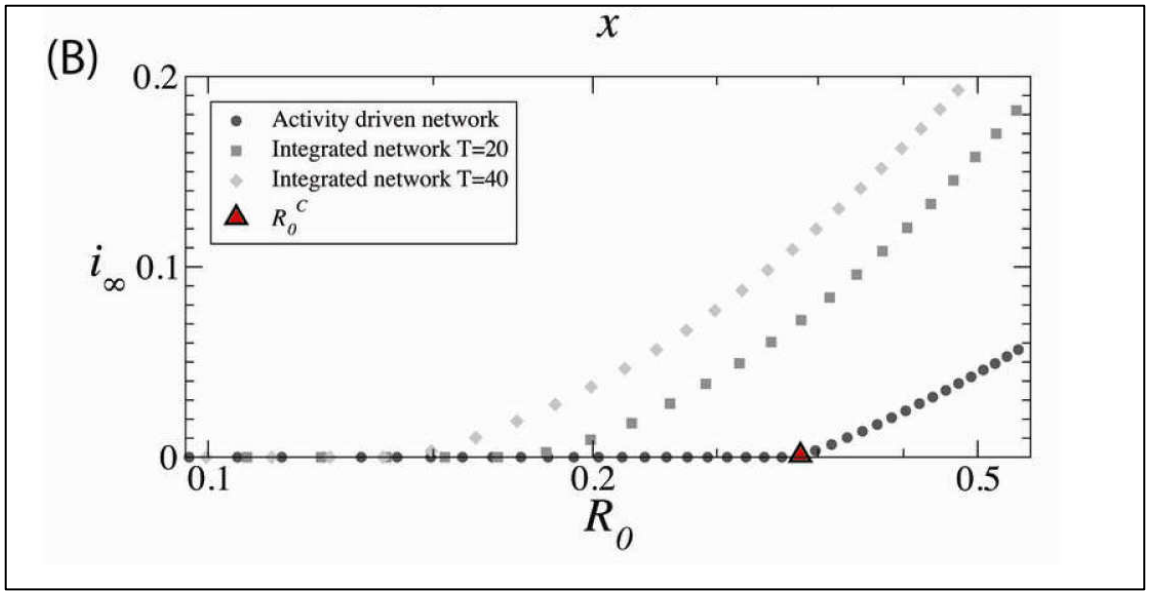
$$\beta - \mu > 0 \quad R_0 = \beta / \mu > 1$$

Для топологических сетей величина эпидемического порога зависит от топологических свойств сети (в частности, количества связей каждого узла)

# SIS-модель на динамической сети

В случае динамической сети, когда число связей узла зависит от его активности, и эпидемический порог также будет зависеть от усредненных коэффициентов активности

$$I_a^{t+\Delta t} = -\mu \Delta t I_a^t + I_a^t + \lambda m (N_a^t - I_a^t) a \Delta t \int da' \frac{I_{a'}^t}{N} + \lambda m (N_a^t - I_a^t) \int da' \frac{I_{a'}^t a' \Delta t}{N},$$



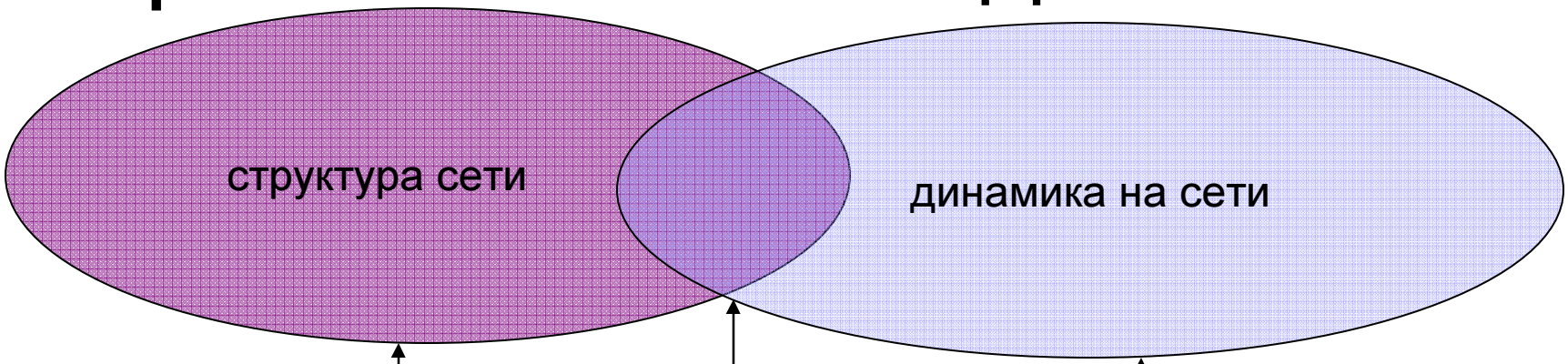

$$\partial_t I = -\mu I + \lambda m \langle a \rangle I + \lambda m \theta,$$
$$\partial_t \theta = -\mu \theta + \lambda m \langle a^2 \rangle I + \lambda m \langle a \rangle \theta,$$

$$\int da I_a^{t+\Delta t} = I^{t+\Delta t}$$

$$\theta^t = \int da' I_{a'}^t a'$$

$$\boxed{\frac{\beta}{\mu} > \frac{2\langle a \rangle}{\langle a \rangle + \sqrt{\langle a^2 \rangle}}.}$$

# Перспективы исследований




Построение модели с изменяющимся количеством узлов (добавление узлов и исчезновение узлов)
+ сети с памятью

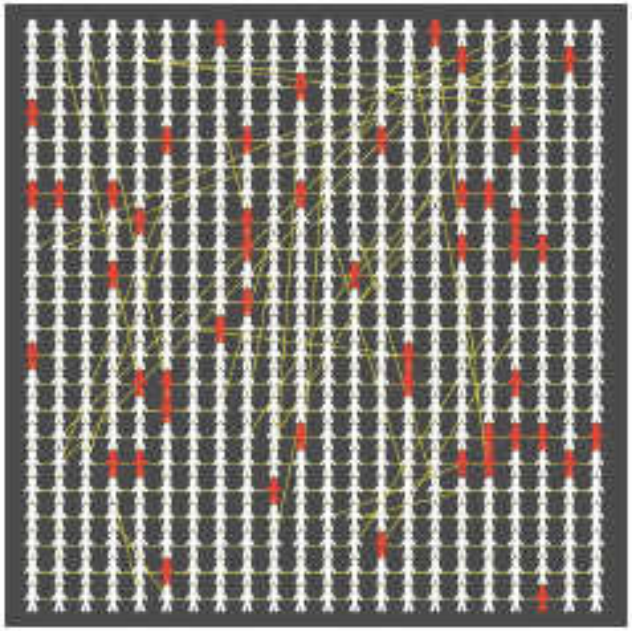
Еще осталось много интересных моделей, которые можно перенести на динамическую сеть

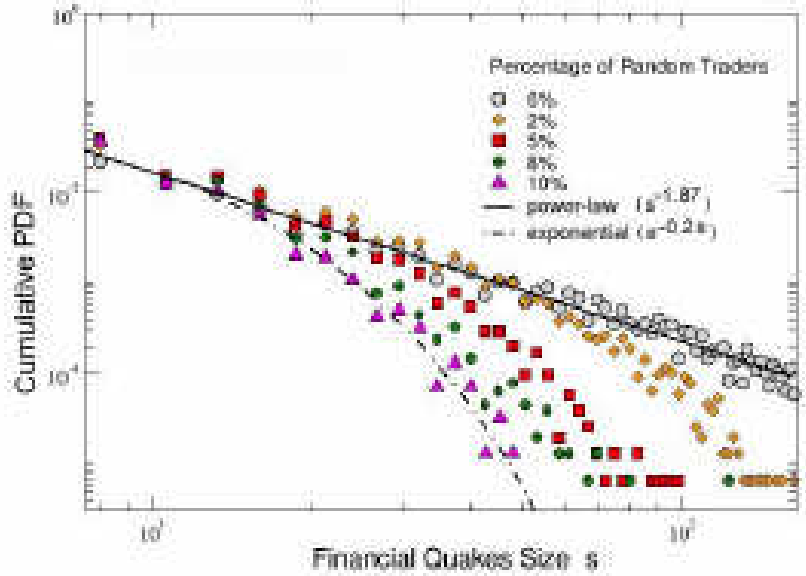
Выход на новый уровень! Применить модель сети с активными узлами к такому виду динамики, где это психологически оправдано

# Перспективы исследований

**Reducing Financial Avalanches By Random Investments**

Alessio Emanuele Biondo [1], Alessandro Pluchino [2], Andrea Rapisarda[2], Dirk Helbing [3]






В сети могут присутствовать трейдеры, играющие случайно

Парадокс: Наличие «случайных» игроков делает систему более стабильной

В исследованиях по влиянию случайности на процесс принятия решения логично заменить пространственную случайность на временную с использованием динамической сети.

# Что почитать? Где посмотреть?

**N. Perra**, B. Goncalves, R. Pastor-Satorras, A. Vespignani,
*Activity driven modeling of dynamic networks*
Scientific Reports 2, 469, doi:10.1038/srep00469 (2012)

**N. Perra**, A. Baronchelli, D. Mocanu, B. Goncalves, R. Pastor-Satorras,
A. Vespignani *Random Walks and search in time-varying networks*
Physical Review Letters, 109, 238701, (2012)

M. Karsai, **N. Perra**, A. Vespignani
*Time varying networks and the weakness of strong ties*
Scientific Reports, 4, 4001, arXiv:1303.5966 (2014)

K. Sun, A. Baronchelli, **N. Perra**
*Epidemic spreading in non-Markovian time-varying networks*
Submitted, arxiv:1404.1006 (2014)

# Что мы узнали?

- Что такое динамическая сеть, каковы ее отличия от топологических сетей. Зачем и в каких случаях уместно учитывать изменения сети во времени.
- Что такое активность узлов и как основные характеристики динамической сети зависят от активности узлов.

# Чему мы научились?

- Строить динамическую сеть с заданным распределением активностей узлов.
- Рассчитывать основные характеристики простого динамического процесса на time-varying network на примере модели распространения эпидемий (SIS-модель)

# Выводы