

**КРИТИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ – МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЙ
или
ХОРОШИЕ ЧИСЛА ИЗ ПЛОХИХ РЯДОВ**

А. И. Соколов

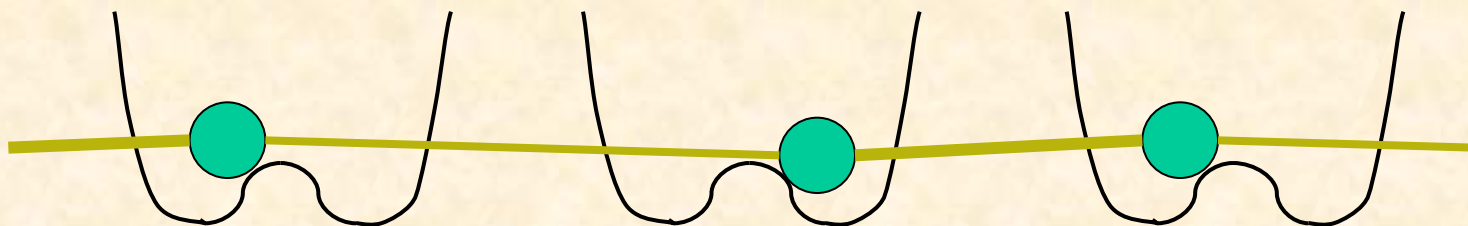
Санкт-Петербургский государственный университет

Содержание

- Флуктуационный гамильтониан Ландау-Вильсона
- Теория возмущений. Проблема фазовых переходов второго рода
- Перенормировка. Идеология ренормализационной группы
- Ренормгрупповая теория возмущений. Расходящиеся ряды их суммирование
- Теория vs эксперимент — рекорды точности
- ε -разложение и псевдо- ε -разложение
- Теоретико-полевая ренормгруппа в двух измерениях
- Анизотропные и слабонеупорядоченные системы

Флуктуационный гамильтониан Ландау-Вильсона

Модель структурного фазового перехода в сильно анигармоническом кристалле (BaTiO_3)



«Одноионный» потенциал

$$W(u_n) = -au_n^2 + bu_n^4$$

Взаимодействие между «активными» ионами:

$$V(u_n, u_{n+1}) = c^2 (u_n - u_{n+1})^2$$

Приближение непрерывной среды:

$$x_n \rightarrow \mathbf{x}, \quad u_n \rightarrow \varphi(\mathbf{x}), \quad (u_n - u_{n+1})^2 \rightarrow (\nabla \varphi(\mathbf{x}))^2$$

Полевая модель фазового перехода:

$$U\{\varphi(\mathbf{x})\} = \int \left[-a\varphi^2(\mathbf{x}) + b\varphi^4(\mathbf{x}) + c^2(\nabla \varphi(\mathbf{x}))^2 \right] d\mathbf{x}$$

Равновесное состояние при $T > 0$ (термодинамика)

$$F = -kT \ln Z, \quad Z = \int D\{\varphi(\mathbf{x})\} \exp\left[-\frac{U\{\varphi(\mathbf{x})\}}{kT}\right] \cdot Z_{kin}$$

Приближение самосогласованного (среднего) поля:

$$\begin{aligned} \varphi^4(\mathbf{x}) &\rightarrow \varphi^2(\mathbf{x})\langle\varphi^2\rangle \sim T\varphi^2(\mathbf{x}), \\ -a &\rightarrow a(T) = \alpha(T - T_c^{(0)}), \quad U\{\varphi(\mathbf{x})\} \rightarrow H\{\varphi(\mathbf{x})\} \end{aligned}$$

Флуктуационный гамильтониан Ландау-Вильсона:

$$H\{\varphi(\mathbf{x})\} = \int d\mathbf{x} \quad m_0^2 \varphi^2 + (\nabla \varphi)^2 + \lambda \varphi^4, \quad m_0^2 \sim T - T_c^{(0)}$$

Теория возмущений

Теория фазовых переходов – это классическая евклидова теория поля с самодействием типа φ^4

$$H\{\varphi(\mathbf{x})\} = \int d\mathbf{x} \frac{1}{2} \left[m_0^2 \varphi^2 + (\nabla \varphi)^2 \right] + \frac{\lambda}{4!} \varphi^4$$

Корреляционная функция (функция Грина, пропагатор):

$$\begin{aligned} G(\mathbf{x}) &= \langle \varphi(\mathbf{x}) \varphi(0) \rangle, & \varphi(\mathbf{x}) &= \sum \varphi(\mathbf{q}) e^{i\mathbf{q}\mathbf{x}}, \\ G(\mathbf{q}) &= \langle \varphi(\mathbf{q}) \varphi(-\mathbf{q}) \rangle, & \varphi(\mathbf{q}) &= \varphi^*(-\mathbf{q}) \end{aligned}$$

Голый пропагатор и голая вершина (константа связи):

$$\text{————} = G_0(\mathbf{q}) = \frac{1}{m_0^2 + q^2}, \quad \text{X} = \lambda$$

Уравнение Дайсона для точного коррелятора:

$$G(\mathbf{q}) = \frac{1}{m_0^2 + q^2 - \Sigma(m_0, q)}$$

Массовый оператор:

$$\Sigma(m_0, q) = \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} + \dots$$

Одетая масса (учет флуктуационного сдвига T_c):

$$m^2 = m_0^2 - \Sigma(m_0, 0)$$

Первое вычитание в пропагаторе:

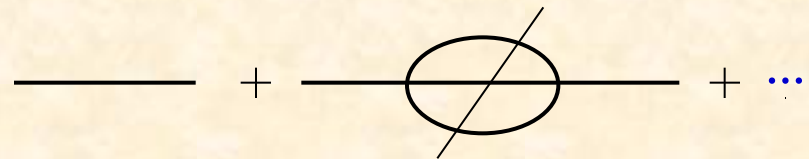
$$G(\mathbf{q}) = \frac{1}{m^2 + q^2 - [\Sigma(m, q) - \Sigma(m, 0)]}$$

Истинная точка фазового перехода:

$$G(0) = \frac{1}{m^2}, \quad m^2 \rightarrow 0 \text{ при } T \rightarrow T_c (\neq T_c^{(0)})$$

Разложение пропагатора вблизи физического полюса:

$$G(\mathbf{q}) = \frac{1}{m^2 + q^2} + \frac{\Sigma(m, q) - \Sigma(m, 0)}{(m^2 + q^2)^2} + \dots =$$



Одетая вершина и эффективная константа связи :

$$\Gamma(\mathbf{q}, \mathbf{q}', \mathbf{q}'', m) = \times + \times \bigcirc \times + \times \bigcirc \bigcirc \times + \dots$$

$$\gamma = \Gamma(0, 0, 0, m)$$

Эффективная константа связи – мера нелинейности системы. Входит в уравнение состояния $f(M) = H$ и определяет нелинейную восприимчивость.

$$\gamma = \lambda - \frac{3}{2} \lambda^2 \int G(\mathbf{q}) G(-\mathbf{q}) \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} + \dots$$

$$= \lambda - \frac{3}{4\pi^2} \lambda^2 \int_0^\Lambda \frac{q^2 dq}{(m^2 + q^2)^2} + \dots = \lambda - \frac{3}{8\pi m} \lambda^2 + \dots$$

Но при $T \rightarrow T_c$ $m \rightarrow 0$! Более того, в высших порядках ТВ

$$\gamma = \lambda - \frac{3}{8\pi} \frac{\lambda^2}{m} + k \frac{\lambda^3}{m^2} - k' \frac{\lambda^4}{m^3} + \dots$$

Ряд теории возмущений – ряд со все более сильно растущими при $T \rightarrow T_c$ коэффициентами. В этом и состоит

ПРОБЛЕМА ФАЗОВЫХ ПЕРЕХОДОВ ВТОРОГО РОДА

Что делать? Как пройти в критическую точку?

Метод ренормгруппы – основы идеологии

Вдали от точки перехода флуктуации ослабляют («экранируют») исходное взаимодействие:

$$\gamma \approx \lambda - \frac{3}{8\pi} \frac{\lambda^2}{m}$$

- Нельзя ли использовать в качестве параметра разложения вместо λ одетый заряд γ , надеясь, что γ , как и m , будет убывать при $T \rightarrow T_c$?
- Не будет ли убывание γ достаточно сильным, чтобы скомпенсировать прогрессирующую расходимость интегралов при $m \rightarrow 0$?

Выразим λ через γ итерациями:

$$\gamma \approx \lambda - \frac{3}{8\pi m} \lambda^2 \rightarrow \lambda \approx \gamma + \frac{3}{8\pi m} \lambda^2 \approx \gamma + \frac{3}{8\pi m} \gamma^2$$

Замена λ на γ в выражениях для физических величин называется перенормировкой; если такую замену можно сделать «до конца», теории присваивают титул перенормируемой.

Эффективная константа связи γ , в отличие от λ , зависит от m , т. е. от температуры. Найдем уравнение для $\gamma(m)$:

$$\frac{d\lambda}{dm} = 0 = \frac{d\gamma}{dm} \left(1 + \frac{3}{4\pi} \frac{\gamma}{m} \right) - \frac{3}{8\pi} \frac{\gamma^2}{m^2}$$

Введем безразмерную одетую константу связи (безразмерный заряд) g и «ренормгрупповое время» t :

$$g = \frac{3}{8\pi} \frac{\gamma}{m}, \quad t = \ln \frac{1}{m}$$

В результате получим уравнение для g

$$\frac{dg}{dt} = g - g^2$$

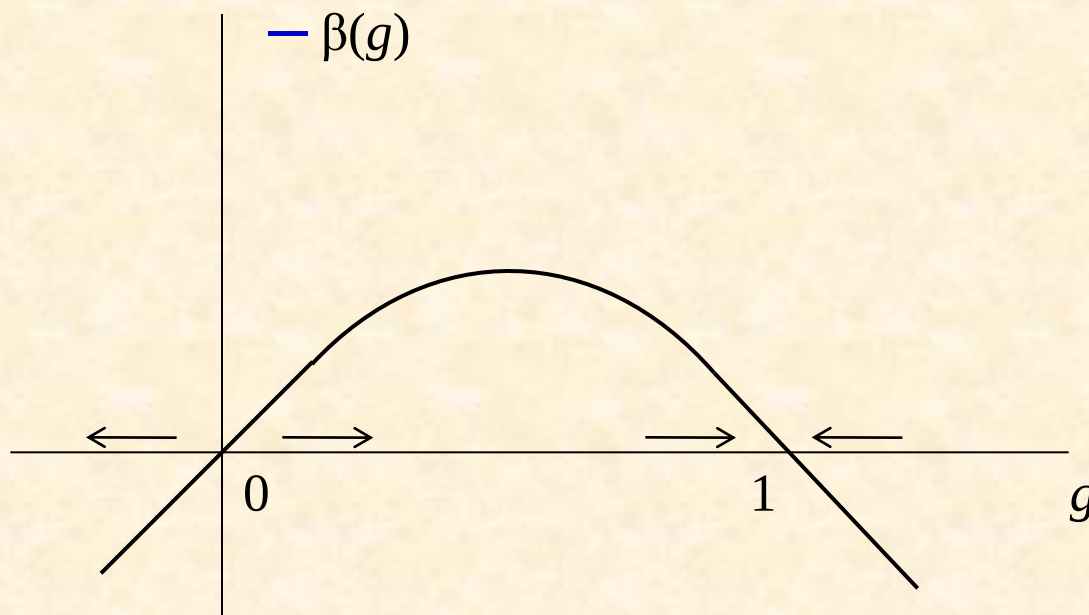
Это и есть уравнение ренормализационной группы (РГ). Его правую часть называют β -функцией или функцией Гелл-Манна-Лоу. Мы нашли β -функцию в однопетлевом («паркетном») приближении:

$$-\beta(g) = g - g^2$$

Точке фазового перехода второго рода отвечает предел $t \rightarrow \infty$ (критическая асимптотика). Этот предел описывается устойчивой особой точкой уравнения РГ – вильсоновской фиксированной точкой (K. G. Wilson, 1971).

Корни β -функции (фиксированные точки) в низшем приближении:

$g = 0$ (гауссова ФТ), $g = 1$ (ФТ Вильсона)



- При $T \rightarrow T_c$ $g \rightarrow 1$ для любых $\lambda > 0$. Но голая константа связи λ – характеристика конкретного материала. Таким образом, при подходе к точке Кюри поведение разных веществ становится одинаковым, универсальным.
- В пределе $m \rightarrow 0$, $g \rightarrow 1$ одетый заряд

$$\gamma = \frac{8\pi}{3} mg \sim m$$

убывает пропорционально m , компенсируя расходимость интегралов. Поэтому ряды перенормированной теории возмущений оказываются сильно улучшенными – они имеют конечные коэффициенты даже в критической точке.

Достаточно ли хороши эти ряды, чтобы давать надежные качественные и количественные результаты?

Ренормгрупповая ТВ, многопетлевые разложения, пересуммирование

Итак,

$$\frac{dg}{dt} = -\beta(g), \quad \beta(g) = -g + g^2 - \dots$$

β -функция и критические индексы γ, ν для трехмерной n -векторной модели известны в шестипетлевом приближении, индекс Фишера η – в семипетлевом (G. A. Baker, B. G. Nickel, D. I. Meiron, 1977). При $n = 1$, т. е. для трехмерной модели Изинга

$$\begin{aligned} \beta(g) = & -g + g^2 - 0.4224965707g^3 + 0.3510695978g^4 \\ & - 0.376526828g^5 + 0.49554751g^6 - 0.749689g^7 + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma^{-1} = & 1 - \frac{1}{6}g + \frac{1}{27}g^2 - 0.0230696213g^3 + 0.0198868203g^4 \\ & - 0.02245952g^5 + 0.0303679g^6 - \dots \end{aligned}$$

Грубая однопетлевая оценка:

$$\gamma^{-1} \approx 1 - \frac{1}{6}, \quad \gamma \approx 1.2$$

Наиболее точные эксперименты, ВТР, НТР, метод Монте-Карло и т. п. дают $\gamma = 1.22 - 1.25$, тогда как без учета критических флуктуаций $\gamma = 1$ (закон Кюри-Вейсса).

Как улучшить результаты однопетлевых РГ расчетов?

Ренормгрупповые разложения, как и другие ряды ТВ, имеют нулевой радиус сходимости, т. е. расходятся (теорема Дайсона). С этими рядами, однако, можно работать, так как — доказано — они являются асимптотическими и суммируемыми по Борелю.

Обобщенное преобразование Бореля (преобразование Бореля-Леруа) для β -функции:

$$\beta(g) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\tilde{b}} B(gt) dt, \quad B(y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_k}{\Gamma(k + \tilde{b} + 1)} y^k$$

Здесь A_k – коэффициенты исходного ряда, для которых известна асимптотика при $k \rightarrow \infty$ (Л. Н. Луатов, 1977)

$$A_k \approx k!(-a)^k k^b \left[c + O\left(\frac{1}{k}\right) \right], \quad a = 0.14777422\dots$$

Ряд для борелевского образа $B(y)$ уже имеет конечный радиус сходимости. Для суммы этого ряда строится приближенное выражение (с помощью аппроксимант Паде, техники конформных отображений и т. п.) с тем, чтобы продолжить ее за пределы круга сходимости и вычислить борелевский интеграл.

Ренормгруппа vs ВТР, Монте-Карло, FSS и т. п.

Теоретические рекорды точности

Аппроксиманты Паде:

$$[M / L] = \frac{a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + \dots + a_M y^M}{1 + b_1 y + b_2 y^2 + \dots + b_L y^L}$$

Координата вильсоновской ФТ в шестипетлевом приближении:

$$g^* = 1.415 \pm 0.0015 \quad (\text{Baker, Nickel, Meiron} - 1976, 1978)$$

$$g^* = 1.414 \pm 0.003 \quad (\text{Le Guillou, Zinn-Justin} - 1977)$$

$$g^* = 1.416 \pm 0.005 \quad (\text{Le Guillou, Zinn-Justin} - 1980)$$

$$g^* = 1.411 \pm 0.004 \quad (\text{Guida, Zinn-Justin} - 1998)$$

$$g^* = 1.419 \quad (\text{A.I.C.} - 1998)$$

Критический индекс восприимчивости γ в шести петлях:

$$\gamma = 1.241 \pm 0.002 \quad (\text{Baker, Nickel, Green, Meiron} - 1976)$$

$$\gamma = 1.2402 \pm 0.0009 \quad (\text{Le Guillou, Zinn-Justin} - 1977)$$

$$\gamma = 1.2408 \pm 0.0008 \quad (\text{Le Guillou, Zinn-Justin} - 1980)$$

$$\gamma = 1.2378 \pm 0.0006 \quad (\text{Murray, Nickel} - 1991)$$

$$\gamma = 1.239 \quad (\text{Antonenko, A.I.S} - 1995)$$

$$\gamma = 1.2396 \pm 0.0013 \quad (\text{Guida, Zinn-Justin} - 1998)$$

Индекс Фишера η («малый»):

$$\eta = 0.02 \pm 0.02 \quad (\text{Baker, Nickel, Green, Meiron} - 1976)$$

$$\eta = 0.0315 \pm 0.0025 \quad (\text{Le Guillou, Zinn-Justin} - 1977)$$

$$\eta = 0.0355 \pm 0.0009 \quad (\text{Murray, Nickel} - 1991, \text{ 7 петель})$$

$$\eta = 0.0335 \pm 0.0025 \quad (\text{Guida, Zinn-Justin} - 1998, \text{ 7 петель})$$

Высокотемпературные разложения для разных решеток (ПК, ОЦК, ГЦК) и спинов ($1/2, 1, 3/2, \dots, \phi^4$) в 20-25 порядках дают:

$$\gamma = 1.237\dots 1.240, \quad \eta = 0.025\dots 0.040.$$

К тем же результаты ведут метод Монте-Карло, техника скейлинга конечного размера (FSS) и их многочисленные модификации.

Итак, точность ренормгрупповых оценок настолько высока, а консенсус между РГ и другими методами настолько полный, что практика (эксперимент) перестает быть критерием истины.

“Experimentalists can only confuse us!”

A. B. Harris, Bad Honnef, 1995

Это было бы правдой, если бы не существовали...

Уникальные эксперименты со сверхтекучим гелием-4

Первые прецизионные измерения (*Buckingham, Fairbank, Kellers, 1958*):

$$C(T) \sim \ln \frac{1}{|t|} \quad (\alpha = 0), \quad t = \frac{T - T_c}{T_c}, \quad t \geq 10^{-6}$$

Результаты калифорнийской группы (*J. A. Lipa, J. A. Nissen, D. R. Swanson, T.C.P. Chui, et al., Stanford/Caltech*):

$$\alpha = -0.0127 \pm 0.0026 \quad (1983)$$

$$\alpha = -0.0151 \pm 0.0012 \quad (1984)$$

$$\alpha = -0.0124 \pm 0.0012 \quad (1992)$$

$$\alpha = -0.0115 \pm 0.0018 \quad (1993)$$

$$\alpha = -0.01285 \pm 0.00038 \quad (1996)$$

$$\alpha = -0.01056 \pm 0.00038 \quad (2000)$$

$$\alpha = -0.0127 \pm 0.0003 \quad (2003)$$

Space Shuttle, 1992

$$|T - T_c|_{\min} = 0.000\,000\,002 \text{ K},$$

7 декад по t в критической области

Теоретические результаты ($n = 2$):

$$\alpha = -0.007 \pm 0.006 \quad (\textit{Le Guillou, Zinn-Justin, 1980})$$

$$\alpha = -0.011 \pm 0.004 \quad (\textit{Guida, Zinn-Justin, 1998})$$

$$\alpha = -0.01126 \pm 0.0010 \quad (\textit{Kleinert, 2000})$$

$$\alpha = -0.0146 \pm 0.0008 \quad (\textit{Campostrini et al., 2001})$$

$$\alpha = -0.0133 \pm 0.0003 \quad (\textit{Burovsky et al., MC, 2005})$$

$$\alpha = -0.0151 \quad (\textit{Hasenbusch, MC, 2008})$$

Теория (как и искусство) в большом долгу!

Еще одна ренормгрупповая ТВ – ε -разложение

В пространстве 4-х измерений задача о критическом поведении решается асимптотически точно (А. И. Ларкин, Д. Е. Хмельницкий, 1969). Диаграммные интегралы в этом случае расходятся при $T \rightarrow T_c$ лишь логарифмически, и уравнение РГ для одетого заряда имеет вид

$$\frac{dg}{dt} = -g^2 + \dots$$

Устойчива теперь гауссова ФТ $g^* = 0$, т. е. при $T \rightarrow T_c$ $g \rightarrow 0$. Теория в критической области становится асимптотически свободной, в ней появляется малый параметр, и уже однопетлевое приближение дает точные результаты – классические асимптотики с логарифмическими множителями. Например,

$$C \sim -\ln|t|$$

Красивая идея – построить теорию возмущений по отклонению размерности пространства от 4 (K. G. Wilson, M. E. Fisher, 1972).

Пусть $D = 4 - \varepsilon$. Тогда, если $\varepsilon \ll 1$,

$$\frac{dg}{dt} = \varepsilon g - g^2 + \dots, \quad g^* = \varepsilon + \dots, \quad \gamma^{-1} = 1 - \frac{\varepsilon}{6} + \dots$$

После второго (Wilson, 1972) и третьего (Brezin, Le Guillou, Zinn-Justin, Nickel, 1973) приближений по ε были найдены 5-петлевые разложения (Владимиров, Казаков, Тарасов, Четыркин, Катаев, Ткачев, Горишный, Ларин, Kleinert, Schulte-Frohlinde, 1979-1991).

Прямое суммирование ε -разложений для КИ при $\varepsilon = 1$:

k	0	1	2	3	4	5
γ	1.000	1.1667	1.2438	1.1948	1.3384	0.8918
η	0	0	0.0185	0.0372	0.0289	0.0545

Ряды по ε – расходящиеся, но асимптотические и суммируемые по Борелю (для простых моделей). Пересуммирование при $\varepsilon = 1$ для изинговского случая $n = 1$ дает:

$$\gamma = 1.2355 \pm 0.0050, \quad 1.2380 \pm 0.0050$$

$$\eta = 0.0360 \pm 0.0050, \quad 0.0365 \pm 0.0050 \quad (Guida, Zinn-Justin, 1998)$$

$$\alpha = 0.113 \pm 0.007, \quad 0.108 \pm 0.007$$

Результаты многопетлевого РГ анализа трехмерных и $(4 - \varepsilon)$ -мерных моделей Изинга и Гейзенберга (с n -векторным параметром порядка) отлично согласуются друг с другом.

С другой стороны, поднять точность ренормгрупповых оценок до «экспериментально-гелиевого» уровня без расчета членов высших порядков (7-8 петель) не удастся. В этом направлении пока сделаны только первые шаги (*R. Guida, P. Ribeca, 2005*).

Ренормгрупповая ТВ 3 – псевдо-ε-разложение

Успех РГ ТВ в трех и 4 – ε измерениях наводит на мысль вывести гибрид этих двух методов. Пусть все диаграммные интегралы будут трехмерными, а перед линейным членом в разложении β-функции встанет формальный малый параметр τ , аналогичный ϵ :

$$\frac{dg}{dt} = \tau g - g^2 + \dots$$

Эта идея лежит в основе процедуры (B. G. Nickel, 1970-е годы), названной псевдо-ε-разложением. Она позволяет разложить по степеням τ критические индексы и, обработав соответствующие ряды, получить при $\tau = 1$ численные оценки для трехмерных систем. Коэффициенты псевдо-ε-разложений быстрее и дольше убывают, но имеют нерегулярные знаки. Их пересуммирование ведет к быстро сходящимся итерациям и «хорошим» числам.

Теоретико-полевая ренормгруппа в двух измерениях

Какова реально вычислительная мощь метода теоретико-полевой РГ, эксплуатирующего расходящиеся степенные ряды по совсем не малым «малым» параметрам $g (\approx 1.4)$, $\varepsilon (= 1)$ и $\tau (= 1)$?

Окончательный ответ может дать лишь сравнение численных результатов с точными. Для трехмерных моделей Изинга и Гейзенберга они не известны.

Существует, однако, нетривиальная модель, для которой точное решение есть. Это двумерная модель Изинга (*L. Onsager*, 1944). Ее критические индексы

$$\gamma = \frac{7}{4}, \quad \beta = \frac{1}{8}, \quad \eta = \frac{1}{4}, \quad \alpha = 0 \quad (C \sim \ln|t|)$$

радикально отличаются от классических. Для 2D МИ известны заряд в вильсоновской ФТ g^* и другие универсальные величины.

РГ функции двумерной модели Изинга были найдены в 4-х петлях «в период бури и натиска» (*Baker, Nickel, Meiron, 1978*); 5-петлевые вклады были рассчитаны позже (*Е. В. Орлов, А. И. С., 2000*).

$$\frac{1}{2}\beta(g) = -g + g^2 - 0.716173621g^3 + 0.930766443g^4 - 1.58238834g^5 + 3.26042g^6 - \dots$$

$$\gamma^{-1} = 1 - 0.333333333g + 0.125023295g^2 - 0.122455138g^3 + 0.164004651g^4 - 0.288554g^5 + \dots$$

$$\eta = 0.033966147g^2 - 0.002022555g^3 + 0.011393097g^4 - 0.0137362g^5 + \dots$$

Как видно, двумерные РГ разложения ощутимо хуже трехмерных.

Тем не менее, эти ряды суммируемы по Борелю, и результаты, получаемые с помощью оптимизированного метода Паде-Бореля-Леруа, выглядят – внешне – вполне пристойно. Вильсоновская ФТ g^* в пяти последовательных РГ приближениях (Орлов, А.И.С., 2000):

k	1	[1/1]	[2/1]	[2/2]	[3/2]	g^*
g^*	1.000	2.4246	1.7508	1.8453	1.8286	1.837 ± 0.03

Сходимость итерационной процедуры очевидна. Однако известное сегодня высокоточное значение $g^* = 1.7543637$ определенно лежит за пределами достаточно консервативной РГ «вилки» ± 0.03 .

$$\Delta g^* \approx 0.08 \approx 5 \% (!)$$

А как дела с критическими индексами?

В пяти петлях оптимизированный метод Паде-Бореля-Леруа дает (Орлов, А.И.С., 2000, Calabrese, Orlov, Pakhnin, A.I.S., 2004):

КИ	γ	ν	η	α	β
РГ, 5 петель	1.790	1.017	0.146	0.068	0.071
Точные значения	1.75	1	0.25	0	0.125

Большие индексы полевая РГ в 2D считает прилично, малые – плохо. В случае КИ большие погрешности можно отнести на счет малой длины и «ранней расходимости» РГ рядов. А как быть с g^* ? Здесь РГ оценка зажата осцилляциями, и учет высших порядков ТВ не спасет!

Дело, скорее всего, в неаналитических вкладах в РГ функции:

$$\delta\beta(g) = a \exp -1/g = 0 + 0 \cdot g + 0 \cdot g^2 + \dots$$

Эти вклады ТВ «не видит», а их роль с понижением размерности пространства растет. Очевидно, для 2D МИ $\delta g^*_{\text{sing}} \sim 5\%$.

Псевдо- ε -разложение и двумерная модель Изинга

Итак, РГ ТВ в двух измерениях работает неважно; ε -разложение при $\varepsilon = 2$ также требует дополнительных мер (biased estimates). А как обстоят дела с псевдо- ε -разложением? Ряды по τ известны сегодня в 5-петлевом приближении (А.И.С., 2005, М. А. Nikitina, A.I.S., 2014):

$$g^* = \tau + 0.716173621\tau^2 + 0.095042867\tau^3 + 0.086080396\tau^4 - 0.204139\tau^5$$

$$\gamma^{-1} = 1 - 0.333333333\tau - 0.113701246\tau^2 + 0.024940678\tau^3 - 0.039896059\tau^4 + 0.0645212\tau^5$$

$$\eta = 0.033966147\tau^2 + 0.046628762\tau^3 + 0.030925471\tau^4 + 0.0256843\tau^5$$

Как видно, псевдо- ε -разложений имеют относительно малые и быстро убывающие коэффициенты с нерегулярными знаками. Убирать факториалы здесь не нужно. Поэтому можно ограничиться простыми аппроксимантами Паде. «Треугольник Паде» для критического индекса $\gamma = (1/\gamma)^{-1}$ имеет вид:

M/L	0	1	2	3	4	5
0	1.000	1.500	1.808	1.703	1.859	1.660
1	1.333	2.024	1.744	1.778	1.777	
2	1.558	1.702	1.800	1.777		
3	1.646	6.871 _{1,1}	1.772			
4	1.732	1.718				
5	1.714					

NB: Пятипетлевые вклады сильно улучшают ситуацию.

Треугольник Паде для «проблемной» вильсоновской ФТ g^* :

М/Л	1	2	3	4	5
0	1.000	1.716	1.811	1.897	1.693
1	3.523 _{1.4}	1.826	2.724 _{1.1}	1.837	
2	1.425	1.918	1.850		
3	2.601 _{1.4}	1.751			
4	1.194				

Усреднив числа, даваемые рабочими аппроксимантами $[3/2]$ и $[2/3]$, получим $g^* = 1.80$. Это значение ближе к $g^* = 1.7543637$, чем оценка, извлеченная из тех же РГ рядов методом Паде-Бореля-Леруа. И опять именно пятипетлевые вклады спасают положение.

Анизотропия и примеси

Рассмотрим флуктуационный гамильтониан Ландау-Вильсона для модели кубического ферромагнетика с $\mathbf{n}$ -компонентным полем φ_α :

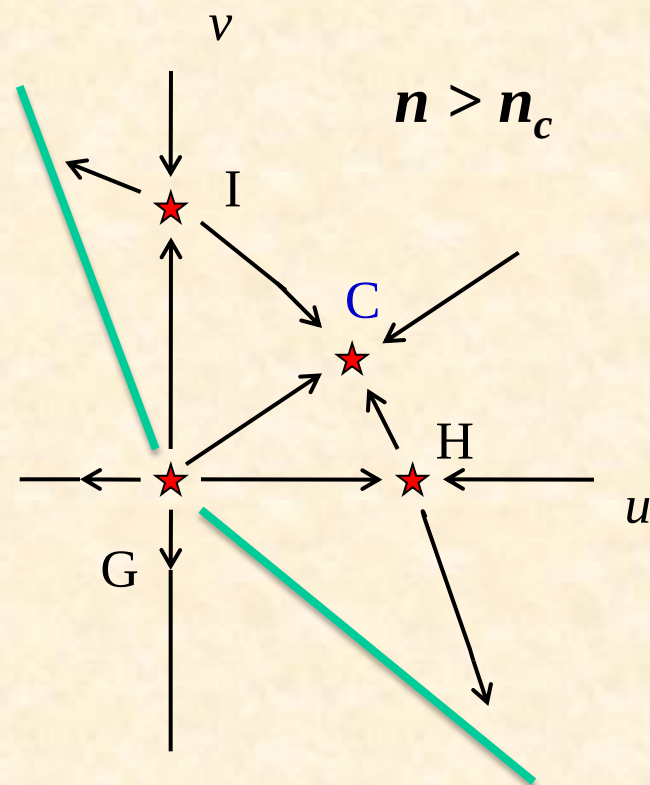
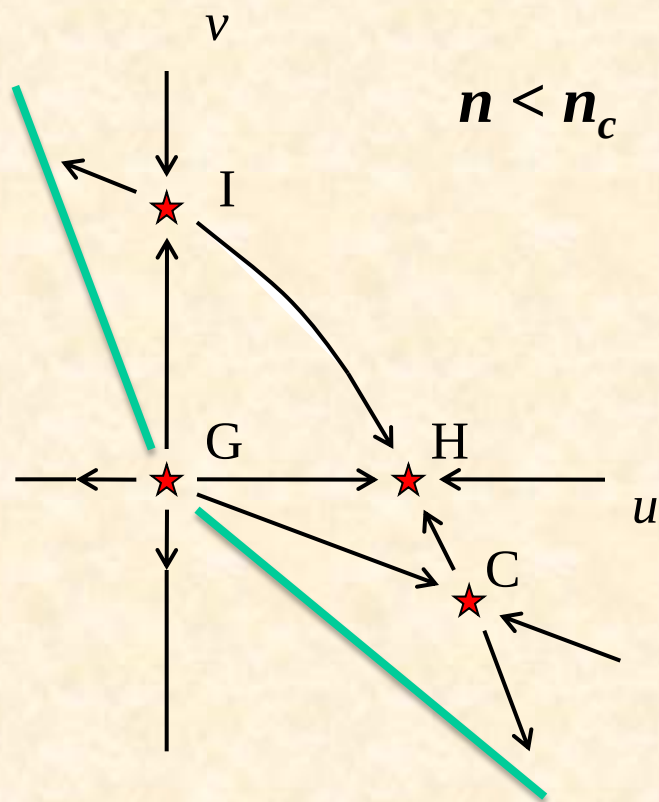
$$H = \int d\mathbf{x} \left[\frac{1}{2} m_0^2 \varphi_\alpha^2 + \nabla_i \varphi_\alpha \nabla_i \varphi_\alpha + \frac{1}{4!} u_0 \varphi_\alpha^2 \varphi_\beta^2 + v_0 \varphi_\alpha^4 \right]$$

Упорядоченных фаз теперь две – тетрагональная (при $v_0 < 0$) и ромбоэдрическая (при $v_0 > 0$). В критической области константы связи зависят от температуры, их эволюцией управляют уравнения РГ:

$$\frac{du}{dt} = -\beta_u(u, v), \quad \frac{dv}{dt} = -\beta_v(u, v)$$

Особым – фиксированным – точкам уравнений РГ отвечают асимптотические режимы поведения системы.

В однопетлевом (паркетном) приближении таких точек четыре: гауссова (G), изинговская (I), гейзенберговская (H) и кубическая (C).



Как видно, критические флуктуации могут

- *изменять симметрию системы в критической точке*
(флуктуационная изотропизация / асимптотическая симметрия),
- *менять род фазового перехода*
(флуктуационная неустойчивость переходов второго рода)

Конкретный сценарий зависит от затравочных значений констант связи u_0, v_0 и размерности параметра порядка n , точнее, от того, что больше – n или граничная размерность n_c .

В низшем РГ приближении $n_c = 4$, т. е. кубические ФМ с $n = 3$ при $T \rightarrow T_c$ должны становиться изотропными. Следующие порядки РГ ТВ, однако, отменяют этот вывод. Например, в $(4 - \varepsilon)$ измерениях (H. Kleinert, V. Schulte-Frohlinde, 1995)

$$n_c = 4 - 2\varepsilon + 2.58847559\varepsilon^2 - 5.87431189\varepsilon^3 + 16.270390\varepsilon^4 \dots$$

РГ расчеты n_c в возрастающих порядках ТВ дают:

k	1	2	3	4	5	6
3D	4	3.01	2.95 (MS, 1987)	2.91 (MSS, 1989)	2.89-2.92 (PS, 2000) 2.91 ± 0.03 (CPV, 2000)	2.89 ± 0.04 (CPV, 2000)
ϵ	4		3.004	2.92 (SAS, 1997)	2.855 (SAS, 1997) 2.87 (CPV, 2000)	

Граничная размерность n_c определенно меньше 3, но очень близка к физическому значению $n = 3$. Результаты многопетлевых РГ расчетов в трех и $(4 - \epsilon)$ измерениях хорошо согласуются друг с другом.

Та же – кубическая – модель в пределе $n \rightarrow 0$.

Этот предел описывает критическую термодинамику легкоосных ферромагнетиков с примесями, точнее, слабонеупорядоченной МИ. РГ расчеты индекса γ в 3D почти сразу (в 2-3 петлях) дают разумную оценку $\gamma_{\text{imp}} \approx 1.34$ (*G. Jug, 1983, И.О.Майер, А.И.С., 1984*), но затем не обнаруживают тенденции к выходу на асимптотику (*Pakhnin, A.I.S., 2000, Pelissetto, Vicari, 2000*):

k	2	3	4	5	6
γ_{imp}	1.337	1.328	1.321 1.326 1.318	1.325(3) (PS, 2000)	1.330(17) (PV, 2000)

Откуда неприятности? Есть ли суммируемость по Борелю? Как обстоят дела в $(4 - \varepsilon)$ измерениях?

Для примесных изинговских систем роль ε -разложения играет $\sqrt{\varepsilon}$ -разложение (Хмельницкий, 1975, Harris, Lubensky, 1975).

В пяти петлях (Shalaev, Antonenko, A.I.S., 1997)

$$\begin{aligned}\gamma_{imp} &= 1 + 0.16823164\sqrt{\varepsilon} - 0.028547082 \sqrt{\varepsilon}^2 \\ &\quad + 0.078828812 \sqrt{\varepsilon}^3 + 0.56450485 \sqrt{\varepsilon}^4 \\ \eta_{imp} &= -0.0094339622 \sqrt{\varepsilon}^2 + 0.034943501 \sqrt{\varepsilon}^3 \\ &\quad - 0.044864982 \sqrt{\varepsilon}^4 + 0.021573216 \sqrt{\varepsilon}^5\end{aligned}$$

Разложения откровенно плохие, подозрение в несуммируемости их по Борелю (A. J. Bray et al., 1987), скорее всего, верно.

Некоторые итоги или 40 лет спустя

Работам Кеннета Вильсона, открывшим эру Ренормализационной Группы в теории фазовых переходов, сегодня более 40 лет. Что мы узнали за эти годы, чему научились?

Итак, что сбылось:

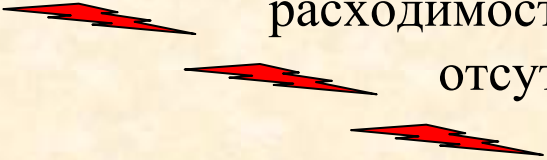
- Метод теоретико-полевой ренормгруппы дал возможность описать критическое поведение множества физических систем, органично объяснить скейлинг и универсальность.
- Вычислительный аппарат РГ позволил рассчитать с высокой точностью критические индексы, отношения критических амплитуд, универсальные значения констант связи g , g_6 , $g_8, \dots$, скейлинговые функции, входящие в уравнения состояния, для трехмерных систем с несложной симметрией.
- Методом РГ изучены различные системы с нетривиальными видами упорядочения и предсказаны новые флуктуационные эффекты, часть из которых обнаружена в эксперименте.

Что не сбылось:

- Не найдены – почти за 40 лет – члены следующих порядков (семи-, восьмипетлевые) в РГ разложениях для трехмерных и $(4 - \epsilon)$ -мерных моделей.
- Не доведена до уровня, необходимого для сравнения теории с высокопрецизионным экспериментом, точность РГ расчетов малых критических индексов.
- Не рассчитаны достаточно длинные РГ разложения (шести-, семипетлевые) для двумерных моделей, чей анализ пролил бы свет на роль, которую играют сингулярности РГ функций в случае систем низких размерностей.
- Не удалось получить, несмотря на грандиозные усилия, надежные численные результаты для слабонеупорядоченных и киральных систем, даже в пяти- и шестипетлевом приближениях.

Памятка для экспериментаторов и не только

- Получив в эксперименте значения критических индексов, особенно высокоточные, сравнивайте их с *наиболее надежными* теоретическими результатами. Таковые, в числе первых, дает техника ренормгруппы, но только *в высоких порядках и в сочетании с пересуммированием*.
- Получив в эксперименте значения критических индексов, в которых вы уверены, но которые **отличаются от теоретических**, вспомните, что, хотя метод РГ — мощный и хорошо апробированный математический инструмент, над ним висят *три дамокловых меча*:

 расходимость ренормгрупповых разложений
отсутствие малого параметра
сингулярности РГ функций

*Любой из них, падая, резко
обесценивает теоретические результаты*